# 10

# Polígonos regulares y el círculo

## 10.1 POLÍGONOS REGULARES

Un *polígono regular* es polígono equilateral y equiangular.

El *centro de un polígono regular* es un segmento que une su centro con cualquier vértice. El *radio de un polígono regular* también lo es de su círculo circunscrito. (Aquí, al igual que se hizo en el capítulo sobre círculos, se usará la palabra *radio* para denotar también al número que es "la longitud del radio").

Un *ángulo central de un polígono regular* es un ángulo incluido entre dos radios dibujados hacia dos vértices sucesivos.

Una *apotema de un polígono regular* es un segmento de línea que parte de su centro y es perpendicular a uno de sus lados. Una apotema también es un radio del círculo inscrito en el polígono .

Así, para el polígono regular mostrado en la figura 10-1, $AB = BC = CD = DE = EA$ y $m\angle A = m\angle B = m\angle C = m\angle D = m\angle E$. También, su centro es $O$, $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$ son sus radios; el $\angle AOB$ es un ángulo central; $\overline{OG}$ y $\overline{OF}$ son apotemas.

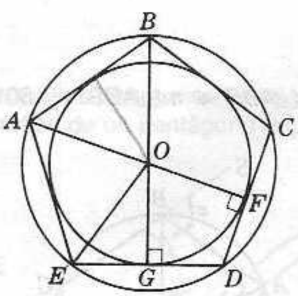



Fig. 10-1

### 10.1A Principios sobre polígonos regulares

**Principio 1:** *sea un polígono regular de* n *lados, si uno de sus lados tiene longitud* s*, entonces su perímetro es* $p = ns$.

**Principio 2:** *un círculo puede circunscribir a cualquier polígono regular.*

**Principio 3:** *un círculo puede inscribirse en cualquier polígono regular.*

**Principio 4:** *el centro de un círculo circunscrito a un polígono regular también es el centro de su círculo inscrito.*

**Principio 5:** *un polígono equilátero inscrito en un círculo es un polígono regular.*

**Principio 6:** *los radios de un polígono regular son congruentes.*

**Principio 7:** *un radio de un polígono regular bisecta al ángulo hacia el cual está dibujado.*

Así, en la figura 10-1, $\overline{OB}$ bisecta al $\angle ABC$.

**Principio 8:** *las apotemas de un polígono regular son congruentes.*

**Principio 9:** *una apotema de un polígono regular bisecta al lado hacia el cual es dibujada.*

Así, en la figura 10-1, $\overline{OF}$ bisecta a $\overline{CD}$ y $\overline{OG}$ bisecta a $\overline{ED}$.

**Principio 10:** *para un polígono regular de* n *lados:*

1. *Todo ángulo central c mide* $\dfrac{360°}{n}$.

2. *Todo ángulo interno i mide* $\dfrac{(n-2)180°}{n}$.

3. *Todo ángulo externo e mide* $\dfrac{360°}{n}$.

Así, para el pentágono regular *ABCDE* de la figura 10-2,

$$m\angle AOB = m\angle ABS = \frac{360°}{n} = \frac{360°}{5} = 72° \qquad m\angle ABC = \frac{(n-2)180°}{n} = \frac{(5-2)180°}{5} = 108°$$

y

$$m\angle ABC + m\angle ABS = 180°$$

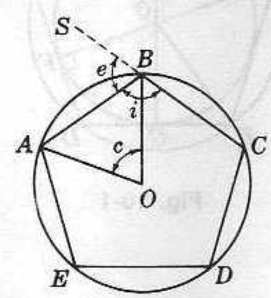



**Fig. 10-2**

## PROBLEMAS RESUELTOS

**10.1 Cálculo de Medidas de Líneas y Ángulos en un Polígono Regular**

(*a*) Calcule la longitud *s* de un pentágono regular si el perímetro *p* es 35.

(*b*) Calcule la apotema *a* de un pentágono regular si el radio del círculo inscrito es 21.

(*c*) En un polígono regular de cinco lados, calcule las medidas del ángulo central *c*, el ángulo externo *e*, y el ángulo interno *i*.

(*d*) Si un ángulo interno de un polígono regular mide 108°, calcule las medidas de un ángulo externo y el número de sus lados.

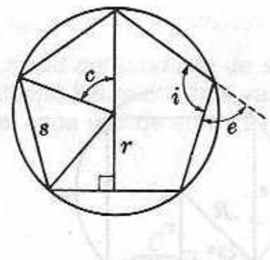



**Fig. 10-3**

**Soluciones**

(*a*) $p = 35$. Dado que $p = 5s$, se tiene que $35 = 5s$ y $s = 7$.

(*b*) Dado que una apotema *r* es un radio del círculo inscrito, su longitud es $a = 21$.

(*c*) $n = 5$. Entonces $m\angle c = \dfrac{360°}{n} = \dfrac{360°}{5} = 72°$; $m\angle e = \dfrac{360°}{n} = 72°$; $m\angle i = 180° - m\angle e = 108°$

(*d*) $m\angle i = 108°$. Entonces $m\angle c = 180° - m\angle i = 72°$. Ya que $m\angle c = \dfrac{360°}{n}$, $n = 5$.

### 10.2 Demostración de un Problema de Polígonos Regulares Formulado en Palabras

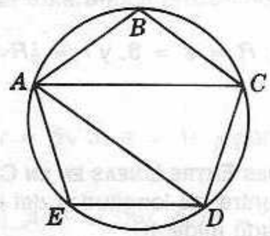
Demostrar que el ángulo en cualquier vértice de un pentágono regular es trisectado por las diagonales dibujadas desde ese vértice.

**Solución**

**Dados:** El pentágono regular *ABCDE*
Diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{AD}$

**Demuéstrese:** $\overline{AC}$ y $\overline{AD}$ trisectan a $\angle A$.

**Plan:** circunscribir un círculo y probar que los ángulos *BAC*, *CAD* y *DAE* son congruentes.

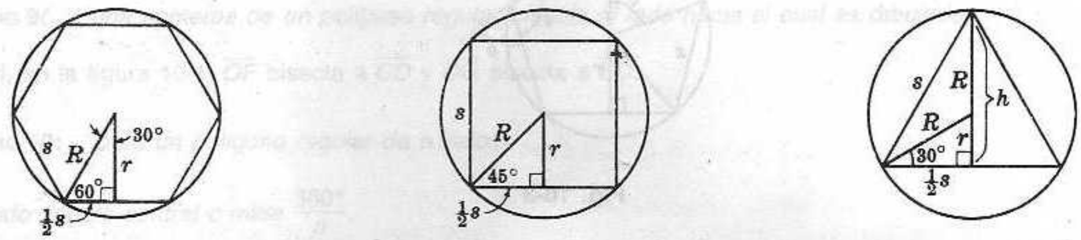



**DEMOSTRACIÓN:**

| Proposiciones | Argumentos |
|---|---|
| 1. *ABCDE* es un pentágono regular. | 1. Dado |
| 2. Circunscribir un círculo alrededor de *ABCDE*. | 2. Un círculo puede circunscribir cualquier polígono regular. |
| 3. $\overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE}$ | 3. Un polígono regular es equilátero. |
| 4. $\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{DE}$ | 4. En un círculo, cuerdas iguales tienen arcos iguales. |
| 5. $\angle BAC \cong \angle CAD \cong \angle DAE$ | 5. En un círculo, ángulos inscritos con arcos iguales son congruentes. |
| 6. $\angle A$ es trisectado | 6. Dividir en tres partes congruentes es trisectar. |

## 10.2 RELACIONES ENTRE SEGMENTOS EN POLÍGONOS REGULARES DE 3, 4 Y 6 LADOS

En el hexágono y cuadrado regulares, al igual que en el triángulo equilátero, se forman triángulos rectos especiales cuando la apotema $r$ y un radio $R$, al dibujarse, terminan sobre el mismo lado. En el caso de un cuadrado se obtiene un triángulo con ángulos de 45°-45°-90°, mientras que en los otros dos casos se obtienen triángulos con ángulos de 30°-60°-90°. Las fórmulas en la figura 10-4 relacionan los lados y radios de estos polígonos regulares.




| Hexágono regular | Cuadrado | Triángulo equilátero |
|---|---|---|
| $s = R$ | $s = R\sqrt{2}$ | $s = R\sqrt{3},\ h = r + R$ |
| $r = \frac{1}{2}R\sqrt{3}$ | $r = \frac{1}{2}s = \frac{1}{2}R\sqrt{2}$ | $r = \frac{1}{3}h,\ R = \frac{2}{3}h,\ r = \frac{1}{2}R$ |

**Fig. 10-4**

## PROBLEMAS RESUELTOS

### 10.3 Aplicación de Relaciones Entre Líneas en un Hexágono Regular

En un hexágono regular: (*a*) calcule las longitudes del lado y la apotema si el radio es 12; (*b*) Encuentre el radio y la longitud de la apotema si el lado tiene longitud 8.

**Soluciones**

(*a*) Dado que $R = 12$, $s = R = 12$, y $r = \frac{1}{2}R\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$.

(*b*) Dado que $s = 8$, $R = s = 8$, y $r = \frac{1}{2}R\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$.

### 10.4 Aplicación de Relaciones Entre Líneas en un Cuadrado

En un cuadrado: (*a*) encuentre las longitudes del lado y la apotema si el radio mide 16; (*b*) calcular el radio y la longitud de la apotema si un lado mide 10.

**Soluciones**

(*a*) Dado que $R = 16$, $s = R\sqrt{2} = 16\sqrt{2}$, y $r = \frac{1}{2}s = 8\sqrt{2}$.

(*b*) Dado que $s = 10$, $r = \frac{1}{2}s = 5$, y $R = s/\sqrt{2} = \frac{1}{2}s\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$.

### 10.5 Aplicación de Relaciones Entre Líneas en un Triángulo Equilátero

En un triángulo equilátero: (*a*) calcule las longitudes del radio, apotema y lado, si la altura mide 6; (*b*) calcule las longitudes del lado, apotema y altura si el radio es 9.

**Soluciones**

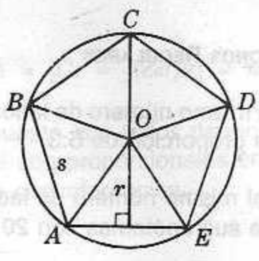
(*a*) Dado que $h = 6$, tenemos que $r = \frac{1}{3}h = 2$; $R = \frac{2}{3}h = 4$; y $s = R\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$.

(*b*) Dado que $R = 9$, $s = R\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$; $r = \frac{1}{2}R = 4\frac{1}{2}$; y $h = \frac{3}{2}R = 13\frac{1}{2}$.

## 10.3 ÁREA DE UN POLÍGONO REGULAR

*El área de un polígono regular es igual a la mitad del producto de su perímetro por la longitud de su apotema.*

Como se muestra en la figura 10-5, al dibujar los radios que van hasta los vértices de un polígono de $n$ lados y perímetro $p = ns$, se le divide en $n$ triángulos, cada uno de área $\frac{1}{2}rs$. Como el área de un polígono regular es $n(\frac{1}{2}rs) = \frac{1}{2}nsr = \frac{1}{2}pr$.




Polígono regular
$A = \frac{1}{2}nsr = \frac{1}{2}pr$

**Fig. 10-5**

## PROBLEMAS RESUELTOS

### 10.6 CÁLCULO DEL ÁREA DE UN POLÍGONO REGULAR

(*a*) Calcule el área de un hexágono regular si la longitud de su apotema es de $5\sqrt{3}$.

(*b*) Calcule el área de un pentágono regular hasta el entero más próximo si la longitud de su apotema es de 20.

**Soluciones**

(*a*) En un hexágono regular, $r = \frac{1}{2}s\sqrt{3}$. Dado que $r = 5\sqrt{3}$, $s = 10$ y por lo tanto $p = 6(10) = 60$. Finalmente, $A = \frac{1}{2}pr = \frac{1}{2}(60)(5\sqrt{3}) = 150\sqrt{3}$.

(*b*) En la figura 10-6, $m\angle AOE = 360°/5 = 72°$ y $m\angle AOF = \frac{1}{2}m\angle AOE = 36°$. Entonces, $\tan 36° = \frac{1}{2}s/20 = s/40$ ó $s = 40 \tan 36°$. Por lo tanto, $s = 40 \tan 36°$.
Finalmente, $A = \frac{1}{2}pr = \frac{1}{2}nsr$ por lo que $A = \frac{1}{2}(5)(40 \tan 36°)(20) = 1453$.

6(5) = 60

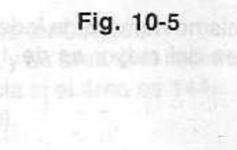



**Fig. 10-6**

## 10.4 RAZONES DE SEGMENTOS Y DE ÁREAS DE POLÍGONOS REGULARES

**Principio 1:** *los polígonos regulares con el mismo número de lados son similares.*

**Principio 2:** *los segmentos correspondientes de polígonos regulares con el mismo número de lados son proporcionales entre sí.*

Aquí, la palabra "segmento" incluye lados, perímetros, radios o circunferencias de círculos inscritos o tos, etcétera.

**Principio 3:** *Las áreas de polígonos regulares con el mismo número de lados están relacionados entre sí como los cuadrados de las longitudes de cualesquiera dos segmentos correspondientes.*

## PROBLEMAS RESUELTOS

### 10.7 Razones de Líneas y de Áreas de Polígonos Regulares

(*a*) En dos polígonos regulares con el mismo número de lados, calcule la razón de las longitudes de sus apotemas si sus perímetros están en proporción de 5:3.

(*b*) En dos polígonos regulares con el mismo número de lados, calcule la longitud de uno de los lados del más pequeño si las longitudes de sus apotemas son 20 y 50, y un lado del mayor tiene longitud 32.5.

(*c*) En dos polígonos regulares con el mismo número de lados, calcule la razón entre sus áreas si la longitud entre sus lados está en proporción de 1:5.

(*d*) En dos polígonos regulares con el mismo número de lados, calcule el área del más pequeño si sus lados tienen longitudes de 4 y 12 y el área del mayor es de 10 260.

**Soluciones**

(*a*) Por el principio 2, $r:r' = p:p' = 5:3$.

(*b*) Por el principio 2, $s:s' = r:r'$; así $s:32.5 = 20:50$, entonces $s = 13$.

(*c*) Por el principio 3, $\dfrac{A}{A'} = \left(\dfrac{s}{s'}\right)^2 = \left(\dfrac{1}{5}\right)^2 = \dfrac{1}{25}$.

(*d*) Por el principio 3, $\dfrac{A}{A'} = \left(\dfrac{s}{s'}\right)^2$. Por lo que $\dfrac{A}{10\,260} = \left(\dfrac{4}{12}\right)^2$. Finalmente $A = 1\,140$.

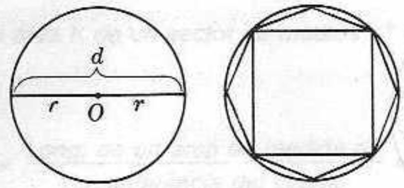
## 10.5 CIRCUNFERENCIA Y ÁREA DE UN CÍRCULO

$\pi$ (pi) es la razón de la circunferencia $C$ de cualquier círculo a su diámetro $d$; esto es $= C/d$. Por lo tanto:

$$C = \pi d \text{ ó } C = 2\pi r$$

Los valores aproximados para $\pi$ son 3.1416 o $\frac{22}{7}$. A menos que se diga lo contrario, el valor de $\pi$ que se usará aquí para resolver problemas es de 3.14.

Un círculo puede considerarse como un polígono regular con un número infinito de lados. Si un cuadrado está inscrito en un círculo y el número de lados es duplicado continuamente (para formar un octágono, un polígono de 16 lados, etc.), los perímetros de los polígonos resultantes se acercarán cada vez más al valor de la circunferencia del círculo (Fig. 10-7).




Círculo: $C = 2\pi r$
$A = \pi r^2$

**Fig. 10-7**

De esta manera, para encontrar el área de un círculo se puede usar la fórmula $A = \frac{1}{2}pr$ pero sustituyendo $C$ por $p$, así:

$$A = \tfrac{1}{2}Cr = \tfrac{1}{2}(2\pi r)(r) = \pi r^2$$

Todos los círculos son figuras similares puesto que todos tienen la misma forma. Ya que son figuras similares, (1) los segmentos correspondientes de círculos son proporcionales entre sí, y (2) las áreas de dos círculos son entre sí como los cuadrados de sus radios o de sus circunferencias.

## PROBLEMAS RESUELTOS

**10.8 Cálculo de la Circunferencia y Área de un Círculo**

En un círculo: (*a*) calcule su circunferencia y su área si el radio es 6; (*b*) calcule su área y su radio si la circunferencia es $18\pi$; (*c*) calcule el radio y la circunferencia si el área es $144\pi$. (Dé la respuesta tanto en múltiplos de $\pi$ como con una precisión de hasta el entero más cercano).

**Soluciones**

(*a*) $r = 6$. Entonces $C = 2\pi r = 12\pi$, y $A = \pi r^2 = 36\pi = 36(3.14) = 113$

(*b*) $C = 18\pi$. Como $C = 2\pi r$, se tiene que $18\pi = 2\pi r$ por lo que $r = 9$. También $A = \pi r^2 = 81\pi = 254$.

(*c*) $A = 144\pi$. Dado que $A = \pi r^2$, se tiene que $144\pi = \pi r^2$ por lo que $r = 12$. También $C = 2\pi r = 24\pi = 75$.

**10.9 Circunferencia y Área de Círculos Inscritos y Circunscritos**

Calcule la circunferencia y área de los círculos inscrito y circunscrito: (*a*) de un hexágono regular cuyo lado tiene longitud 8; (*b*) de un triángulo equilátero cuya altura tiene longitud $9\sqrt{3}$ (Fig. 10-8).

**Soluciones**

(*a*) Aquí $R = s = 8$. Entonces $C = 2\pi R = 16\pi$, y $A = \pi R^2 = 64\pi$.
También $r = \frac{1}{2}R\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$. Entonces $C = 2\pi r = 8\pi\sqrt{3}$ y $A = \pi r^2 = 48\pi$.

(*b*) Aquí $R = \frac{2}{3}h = 6\sqrt{3}$. Entonces $C = 2\pi R = 12\pi\sqrt{3}$ y $A = \pi R^2 = 108\pi$.
También $r = \frac{1}{3}h = 3\sqrt{3}$. Entonces $C = 2\pi r = 6\pi\sqrt{3}$ y $A = \pi r^2 = 27\pi$.


(a) (b)

**Fig. 10-8**

## 10.10 Razones de Segmentos y Áreas en Círculos

(*a*) Si las circunferencias de dos círculos están en proporción de 2:3, calcule la razón de sus diámetros y la razón de sus áreas.

(*b*) Si las áreas de dos círculos están en proporción de 1:25, calcule la razón de sus diámetros y la razón de las circunferencias.

**Soluciones**

(*a*) $\frac{d}{d'} = \frac{C}{C'} = \frac{2}{3}$ y $\frac{A}{A'} = \left(\frac{C}{C'}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$.

(*b*) Dado que $\frac{A}{A'} = \left(\frac{d}{d'}\right)^2$, $\frac{1}{25} = \left(\frac{d}{d'}\right)^2$ por lo que $\frac{1}{5} = \frac{d}{d'}$. También $\frac{C}{C'} = \frac{d}{d'} = \frac{1}{5}$.

## 10.6 LONGITUD DE UN ARCO; ÁREAS DE UN SECTOR Y DE UN SEGMENTO

Un sector de un círculo es una parte de un círculo acotada por dos radios y su arco interceptado. Así, en la figura 10-9, la sección sombreada del círculo *O* es el sector *OAB*.

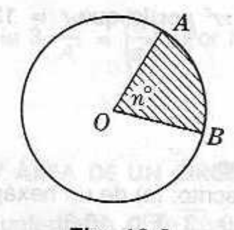
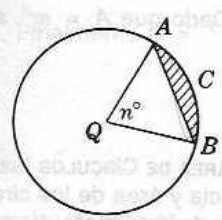



**Fig. 10-9**




**10-10**

Un *segmento de un círculo* es una parte de un círculo acotada por una cuerda y su arco. Un *segmento menor* de un círculo es el más pequeño de los dos segmentos así formados. Así, en la figura 10-10, la sección sombreada del círculo *Q* es el segmento menor *ACB*.

**Principio 1:** *En un círculo de radio r, la longitud l de un arco de medida n° es igual a* $\frac{n}{360}$ *de la circunferencia del círculo, esto es* $l = \frac{n}{360}2\pi r = \frac{\pi n r}{180}$.

**Principio 2:** *en un círculo de radio r, el área K de un sector de medida n° es igual a* $\frac{n}{360}$ *del área del círculo, esto es* $K = \frac{n}{360}\pi r^2$.

**Principio 3:** $\dfrac{\text{Área de un sector de } n°}{\text{Área del círculo}} = \dfrac{\text{Long. de un arco de medida } n°}{\text{Circunferencia del círculo}} = \dfrac{n}{360}$.

**Principio 4:** *el área de un segmento menor de un círculo es igual al área de su sector menos el área del triángulo formado por sus radios y la cuerda.*

**Principio 5:** *si un polígono regular está inscrito en un círculo, cada segmento cortado por el polígono tiene un área igual a la diferencia entre el área del círculo y el área del polígono dividida por el número de sus lados.*

## PROBLEMAS RESUELTOS

### 10.11 Longitud de un Arco

(*a*) Calcule la longitud de un arco de 36° en un círculo cuya circunferencia es de $45\pi$.

(*b*) Calcule el radio de un círculo si un arco de 40° tiene una longitud de $4\pi$.

**Soluciones**

(*a*) Aquí $n° = 36°$ y $C = 2\pi r = 45\pi$. Por lo tanto $l = \frac{n}{360}2\pi r = \frac{36}{360}45\pi = \frac{9}{2}\pi$.

(*b*) Ahora $l = 4\pi$ y $n° = 40°$. Si $l = \frac{n}{360}2\pi r$ se tiene que $4\pi = \frac{40}{360}2\pi r$, por lo que $r = 18$

### 10.12 Área de un Sector

(*a*) Calcule el área $K$ de un sector de 300° de un círculo cuyo radio es 12.

(*b*) Calcule la medida del ángulo central del sector cuya área es $6\pi$, si el área del círculo es $9\pi$.

(*c*) *Calcule el radio del círculo si un arco de longitud* $2\pi$ tiene un sector de área $10\pi$.

**Soluciones**

(*a*) $n° = 300°$, y $r = 12$. Entonces $K = \frac{n}{360}\pi r^2 = \frac{300}{360}144\pi = 120\pi$.

(*b*) $\dfrac{\text{Área del sector}}{\text{Área del círculo}} = \dfrac{n}{360}$, por lo tanto $\dfrac{6\pi}{9\pi} = \dfrac{n}{360}$ por lo que $n = 240$. Por lo que el ángulo central mide 240°.

(*c*) $\dfrac{\text{Longitud de arco}}{\text{Circunferencia}} = \dfrac{\text{área del sector}}{\text{área del círculo}}$, por lo tanto $\dfrac{2\pi}{2\pi r} = \dfrac{10\pi}{\pi r^2}$ y $r = 10$.

### 10.13 Área de un Segmento de un Círculo

(*a*) Calcule el área de un segmento si su ángulo central mide 60° y el radio del círculo mide 12.

(*b*) Calcule el área de un segmento si su ángulo central mide 90° y el radio del círculo mide 8.

(*c*) Calcule cada segmento formado por un triángulo equilátero inscrito, si el radio del círculo es de 8.

**Soluciones**

Véase la Fig. 10-11

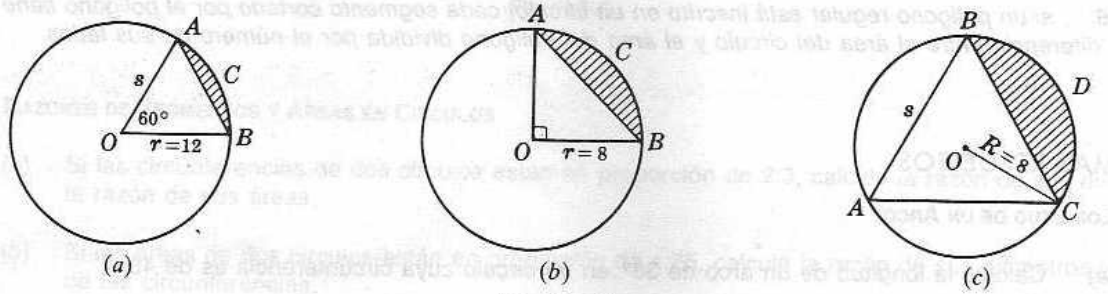



Fig. 10-11

(*a*) $n° = 60°$ y $r = 12$. Entonces el área del sector $OAB = \frac{n}{360}\pi r^2 = \frac{60}{360}144\pi = 24\pi$.
También el área del triángulo equilátero $\triangle OAB = \frac{1}{4}s^2\sqrt{3} = \frac{1}{4}(144)\sqrt{3} = 36\sqrt{3}$.
Por lo tanto el área del segmento $ACB = 24\pi - 36\sqrt{3}$.

(*b*) $n° = 90°$ y $r = 8$. Entonces el área del sector $OAB = \frac{n}{360}\pi r^2 = \frac{90}{360}64\pi = 16\pi$.

También el área del triángulo rectángulo $\triangle OAB = \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}(8)(8) = 32$. Por lo tanto el área del segmento $ACB = 16\pi - 32$.

(*c*) $R = 8$. Dado que $s = R\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$; al área del $\triangle ABC$ es de $\frac{1}{4}s^2\sqrt{3} = 48\sqrt{3}$. También, el área del círculo $O = \pi R^2 = 64\pi$.
Por lo tanto el área del segmento $BDC = \frac{1}{3}(64\pi - 48\sqrt{3})$.

### 10.14 Área de un Segmento Formado por un Polígono Regular Inscrito

Calcule el área de cada segmento formado por un polígono regular inscrito de 12 lados (dodecágono) si el radio del círculo es de 12. (Fig. 10-12).

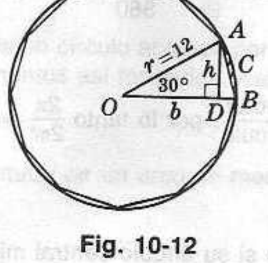



Fig. 10-12

**Solución**

Área $OAB = \frac{n}{360}\pi r^2 = \frac{30}{360}144\pi = 12\pi$.

Para encontrar el área del $\triangle OAB$ sea $\overline{AD}$ la altura a la base $\overline{OB}$. Dado que $m\angle AOB = 30°$, $h = AD = \frac{1}{2}r = 6$. Ahora, el área del $\triangle OAB$ es $\frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}(12)(6) = 36$.

Por lo tanto, el área del segmento $ACB$ es $12\pi - 36$.

## 10.7 ÁREAS DE FIGURAS COMBINADAS

Las áreas de figuras combinadas como la de la figura 10-13 pueden calcularse mediante la determinación de las áreas individuales seguida de la suma o la resta de ellas, según resulte conveniente. Así, el área sombreada en la figura es igual a la suma del área del cuadrado y la del semicírculo: $A = 8^2 + \frac{1}{2}(16\pi) = 64 + 8\pi$.

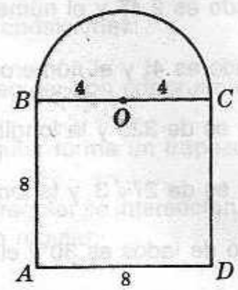



Fig. 10-13

## PROBLEMAS RESUELTOS

### 10.15 CÁLCULO DE ÁREAS DE FIGURAS COMBINADAS

Calcular el área sombreada en cada inciso de la figura 10-14. En (*a*), los círculos *A*, *B* y *C* son externamente tangentes y cada uno tiene radio 3. En (*b*), cada arco es parte de un círculo de radio 9.

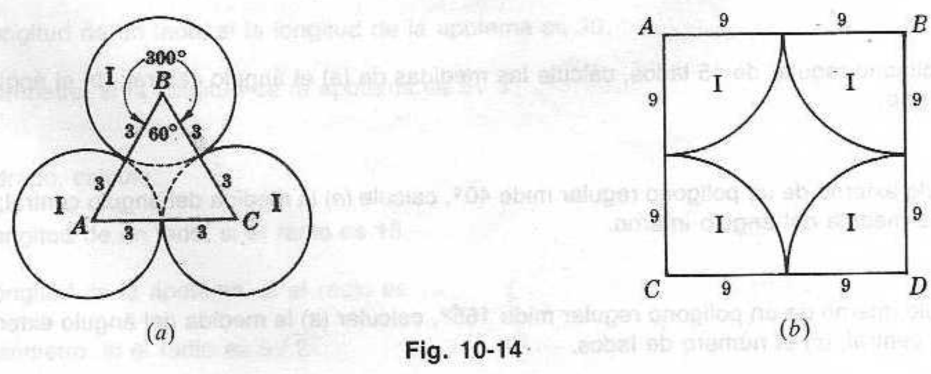



Fig. 10-14

**Soluciones**

(*a*) El área del $\triangle ABC = \frac{1}{4}s^2\sqrt{3} = \frac{1}{4}(6^2)\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$. Área del sector I $= \dfrac{n^\circ}{360^\circ}\pi r^2 = \dfrac{300}{360}\pi 3^2 = \dfrac{15}{2}\pi$.

Área sombreada $= 9\sqrt{3} + 3(\frac{15}{2}\pi) = 9\sqrt{3} + \frac{45}{2}\pi$.

(*b*) Área del cuadrado $= 18^2 = 324$. Área del sector I $= \dfrac{n^\circ}{360^\circ}(\pi r^2) = \dfrac{90}{360}(81\pi) = \dfrac{81}{4}\pi$.

Área sombreada $= 324 - 4(\frac{81}{4}\pi) = 324 - 81\pi$.

## Problemas complementarios

1. Para un polígono regular, calcule: (10.1)

   (*a*) El perímetro, si la longitud de un lado es 8 y el número de lados es 25.

   (*b*) El perímetro, si la longitud de un lado es 2.45 y el número de lados es 10.

   (*c*) El perímetro, si la longitud de un lado es $4\frac{2}{3}$ y el número de lados es 24.

   (*d*) El número de lados, si el perímetro es de 325 y la longitud de un lado es 25.

   (*e*) El número de lados, si el perímetro es de $27\sqrt{3}$ y la longitud de un lado es $3\sqrt{3}$.

   (*f*) La longitud de un lado, si el número de lados es 30 y el perímetro es 100.

   (*g*) La longitud de un lado, si el perímetro es 67.5 y el número de lados es 15.

2. Para un polígono regular, calcule: (10.1)

   (*a*) La longitud de la apotema, si el diámetro de un círculo inscrito es 25.

   (*b*) La longitud de la apotema, si el radio del círculo inscrito es 23.47.

   (*c*) El radio del círculo inscrito, si la longitud de la apotema es $7\sqrt{3}$.

   (*d*) El radio del polígono regular, si el diámetro del círculo circunscrito es 37.

   (*e*) El radio del círculo circunscrito, si el radio del polígono regular es $3\sqrt{2}$.

3. Para un polígono regular de 15 lados, calcule las medidas de (*a*) el ángulo central; (*b*) el ángulo externo; (*c*) el ángulo interno. (10.1)

4. Si un ángulo externo de un polígono regular mide 40°, calcule (*a*) la medida del ángulo central; (*b*) el número de lados; (*c*) la medida del ángulo interno. (10.1)

5. Si un ángulo interno de un polígono regular mide 165°, calcular (*a*) la medida del ángulo externo; (*b*) la medida del ángulo central; (*c*) el número de lados. (10.1)

6. Si un ángulo central de un polígono regular mide 5°, calcule: (*a*) la medida del ángulo externo; (*b*) el número de lados; (*c*) la medida del ángulo interno. (10.1)

7. Identifique el polígono regular tal que: (10.1)

   (*a*) Su ángulo central mide 45°.

   (*b*) Su ángulo central mide 60°.

   (*c*) Su ángulo externo mide 120°.

   (*d*) Su ángulo externo mide 36°.

   (*e*) Su ángulo interno es congruente con su ángulo central.

   (*f*) Su ángulo interno mide 150°.

8. Demuestre cada una de las siguientes proposiciones: (10.2)

   (*a*) Las diagonales de un pentágono regular son congruentes.

   (*b*) Una diagonal de un pentágono regular forma un trapezoide isósceles con tres de sus lados.

   (*c*) Si dos diagonales de un pentágono regular se intersectan, el segmento más largo de cada diagonal es congruente con un lado del pentágono regular.

9. En un hexágono regular calcule: (10.3)

   (*a*) La longitud de un lado, si su radio es 9.

   (*b*) El perímetro, si su radio es 5.

   (*c*) La longitud de su apotema, si su radio es 12.

   (*d*) Su radio, si la longitud de un lado es 6.

   (*e*) La longitud de la apotema, si la longitud de un lado es 26.

   (*f*) Su radio, si la longitud de su apotema es $3\sqrt{3}$.

   (*g*) La longitud de un lado, si la longitud de la apotema es 30.

   (*h*) El perímetro, si la longitud de la apotema es $5\sqrt{3}$.

10. En un cuadrado, calcule. (10.4)

   (*a*) La longitud de un lado, si el radio es 18.

   (*b*) La longitud de la apotema, si el radio es 14.

   (*c*) El perímetro, si el radio es $5\sqrt{2}$.

(*d*) El radio, si la longitud de un lado es 16.

(*e*) La longitud de un lado, si la longitud de la apotema es 1.7.

(*f*) El perímetro, si la longitud de la apotema es $3\frac{1}{2}$.

(*g*) El radio, si el perímetro es 40.

(*h*) La longitud de la apotema, si el perímetro es $16\sqrt{2}$.

**11.** Para un triángulo equilátero, calcule: (10.5)

(*a*) La longitud de un lado, si su radio es 30.

(*b*) La longitud de la apotema, si su radio es 28.

(*c*) La longitud de una altura, si su radio es 18.

(*d*) El perímetro, si su radio es $2\sqrt{3}$.

(*e*) Su radio, si la longitud de un lado es 24.

(*f*) La longitud de la apotema, si la longitud de un lado es 24.

(*g*) La longitud de su altura, si la longitud de un lado es 96.

(*h*) Su radio, si la longitud de la apotema es 21.

(*i*) La longitud de un lado, si la longitud de la apotema es $\sqrt{3}$.

(*j*) La longitud de la altura, si la longitud de la apotema es $3\frac{1}{3}$.

(*k*) La longitud de la altura, si el perímetro es 15.

(*l*) La longitud de la apotema, si el perímetro es 54.

**12.** (*a*) Calcule el área de un pentágono regular hasta el entero más cercano, si la longitud de la apotema es 15.

(*b*) Calcule el área de un decágono regular hasta el entero más cercano, si la longitud de lado es 20. (10.6)

**13.** Calcule el área de un hexágono regular, en forma de un radical, si (*a*) la longitud de un lado es 6; (*b*) su radio es 8; (*c*) la longitud de la apotema es $10\sqrt{3}$. (10.6)

**14.** Calcule el área de un cuadrado si (*a*) la longitud de la apotema es 12; (*b*) su radio es $9\sqrt{2}$; (*c*) su perímetro es 40. (10.6)

**15.** Calcule el área de un triángulo equilátero, en términos de un radical, si: (10.6)

(*a*) La longitud de la apotema es $2\sqrt{3}$.

(*b*) Su radio es 6.

(*c*) La longitud de la altura es 4.

(*d*) La longitud de la altura es $12\sqrt{3}$.

(*e*) El perímetro es $6\sqrt{3}$.

(*f*) La longitud de la apotema es 4.

16. Si el área de un hexágono regular es $150\sqrt{3}$ calcular (*a*) la longitud de un lado; (*b*) su radio; (*c*) la longitud de la apotema. (10.6)

17. Si el área de un triángulo equilátero es $81\sqrt{3}$, calcule (*a*) la longitud de un lado; (*b*) la longitud de la altura; (*c*) su radio; (*d*) la longitud de la apotema. (10.6)

18. Calcule la proporción en que están los perímetros de dos polígonos regulares con el mismo número de lados si: (10.7)

(*a*) Sus lados están en proporción de 1:8.

(*b*) Sus radios están en proporción de 4:9.

(*c*) Sus radios son 18 y 20.

(*d*) Sus apotemas tienen longitudes 16 y 22.

(*e*) La longitud del lado del mayor es tres veces la del menor.

(*f*) La longitud de la apotema más corta es dos quintos la longitud de la más larga.

(*g*) Las longitudes de las apotemas son $20\sqrt{2}$ y 15.

(*h*) La circunferencia del círculo circunscrito mayor es $2\frac{1}{2}$ veces la del menor.

19. Calcule la razón de los perímetros de dos triángulos equiláteros si:(*a*) los lados tienen longitudes 20 y 8; (*b*) sus radios son 12 y 60; (*c*) sus apotemas tienen longitudes $2\sqrt{3}$ y $6\sqrt{3}$; (*d*) las circunferencias de sus círculos inscritos son 120 y 160; (e) sus alturas tienen longitudes $5x$ y $x$. (10.7)

20. Calcule la razón entre las longitudes de los lados de dos polígonos regulares con el mismo número de lados si sus áreas están en proporción de: (*a*) 25:1; (*b*) 16:49; (*c*) $x^2$:4; (*d*) 2:1; (*e*) 3:$y^2$; (*f*) $x$:18. (10.7

21. Calcule la razón entre las áreas de dos hexágonos regulares, si: (*a*) sus lados tienen longitudes 14 y 28; (*b*) sus apotemas tienen longitudes 3 y 15; (*c*) sus radios son $6\sqrt{3}$ y $\sqrt{3}$; (*d*) sus perímetros son 75 y 250; (*e*) las circunferencias de los círculos circunscritos son 28 y 20. (10.7)

22. Calcule la circunferencia de un círculo en términos de $\pi$, si: (*a*) el radio es 6; (*b*) el diámetro es 14; (*c*) el área es $25\pi$; (*d*) el área es $3\pi$. (10.8)

23. Calcule el área de un círculo en términos de $\pi$, si: (*a*) el radio es 3; (*b*) el diámetro es 10; (*c*) la circunferencia es $16\pi$; (*d*) la circunferencia es $\pi$; (*e*) la circunferencia es $6\pi\sqrt{2}$ (10.8)

**24.** En un círculo: (*a*) calcule la circunferencia y el área, si el radio es 5; (*b*) calcule el área y el radio, si la circunferencia es $16\pi$; (*c*) calcule el radio y la circunferencia, si el área es $16\pi$. (10.8)

**25.** En un hexágono regular, calcule la circunferencia del círculo circunscrito, si: (*a*) la longitud de la apotema es $3\sqrt{3}$; (*b*) el perímetro es 12; (*c*) la longitud de un lado es $3\frac{1}{2}$. Asimismo, calcular la circunferencia del círculo inscrito, si (*d*) la longitud de la apotema es 13; (*e*) la longitud de un lado es 8; (*f*) el perímetro es $6\sqrt{3}$. (10.9)

**26.** Para un cuadrado, calcule el área en términos de $\pi$ del: (10.9)

(*a*) círculo circunscrito, si la longitud de la apotema es 7.

(*b*) círculo circunscrito, si el perímetro es 24.

(*c*) círculo circunscrito, si la longitud de un lado es 8.

(*d*) círculo inscrito, si la longitud de la apotema es 5.

(*e*) círculo inscrito, si la longitud de un lado es $12\sqrt{2}$.

(*f*) círculo inscrito, si el perímetro es 80.

**27.** Calcule la circunferencia y el área del: (1) círculo circunscrito y (2) círculo inscrito de: (10.9)

(*a*) Un hexágono regular, si la longitud de un lado es 4.

(*b*) Un hexágono regular, si la longitud de la apotema es $4\sqrt{3}$.

(*c*) Un triángulo equilátero, si la longitud de la altura es 9.

(*d*) Un triángulo equilátero, si la longitud de la apotema es 4.

(*e*) Un cuadrado, si la longitud de un lado es 20.

(*f*) Un cuadrado, si la longitud de la apotema es 3.

**28.** Calcule el radio de un tubo que tiene la misma capacidad que otros dos tubos juntos cuyos radios son: (*a*) 6 pies y 8 pies; (*b*) 8 pies y 15 pies; (*c*) 3 pies y 6 pies. (*Sugerencia*: calcule las áreas de sus secciones circulares transversales.) (10.10)

**29.** En un círculo, calcule la longitud de un arco de 90°, si: (10.11)

(*a*) El radio es 4.

(*b*) El diámetro es 40.

(*c*) La circunferencia es 32.

(*d*) La circunferencia es $44\pi$.

(*e*) Un hexágono inscrito tiene un lado de longitud 12.

(*f*) Un triángulo equilátero inscrito tiene una altura de longitud 30.

**30.** Calcule la longitud de: (10.11)

(*a*) Un arco de 90°, si el radio del círculo es 6.

(*b*) Un arco de 180°, si la circunferencia es 25.

(*c*) Un arco de 30°, si la circunferencia es $60\pi$.

(*d*) Un arco de 40°, si el diámetro es 18.

(*e*) Un arco interceptado por el lado de un hexágono regular inscrito en un círculo de radio 3.

(*f*) Un arco interceptado por una cuerda de longitud 12 en un círculo de radio 12.

**31.** En un círculo, calcule el área de un sector de 60°, si: (10.12)

(*a*) El radio es 6.

(*b*) El diámetro es 2.

(*c*) La circunferencia es $10\pi$.

(*d*) El área del círculo es $150\pi$.

(*e*) El área del círculo es 27.

(*f*) El área de un sector de 240° es 52.

(*g*) Un hexágono inscrito tiene un lado de longitud 12.

(*h*) Un hexágono inscrito tiene un área de $24\sqrt{3}$.

**32.** Calcule el área de un: (10.12)

(*a*) Sector de 60°, si el radio del círculo es 6.

(*b*) Sector de 240°, si el área del círculo es 30.

(*c*) Sector de 15°, si el área del círculo es $72\pi$.

(*d*) Sector de 90°, si la longitud de su arco es $4\pi$.

**33.** Calcule la medida de un ángulo central de un arco cuya longitud es: (10.12)

(*a*) 3 m, si la circunferencia es 9 m.

(*b*) 2 pies, si la circunferencia es 1 yd.

(*c*) 25, si la circunferencia es 250.

(*d*) $6\pi$, si la circunferencia es $12\pi$.

(*e*) Tres octavos de la circunferencia.

(*f*) Igual al radio.

**34.** Calcule la medida del ángulo central de un sector cuya área es: (10.12)

(*a*) 10, si el área del círculo es 50.

(*b*) 15 $cm^2$, si el área del círculo es 20 $cm^2$

(*c*) 1 $pie^2$, si el área del círculo es 1 $yd^2$.

(*d*) $5\pi$, si el área del círculo es $12\pi$.

(*e*) Ocho novenos del área de un círculo.

**35.** Calcule la medida del ángulo central de: (10.11), (10.12)

(*a*) Un arco cuya longitud es $5\pi$, si el área de su sector es $25\pi$.

(*b*) Un arco cuya longitud es $12\pi$, si el área de su sector es $48\pi$.

(*c*) Un sector cuya área es $2\pi$, si la longitud de su arco es $\pi$.

(*d*) Un sector cuya área es $10\pi$, si la longitud de su arco es $2\pi$.

**36.** Calcule el radio de un círculo si: (10.11), (10.12)

(*a*) Un arco de 120° tiene una longitud de $8\pi$.

(*b*) Un arco de 40° tiene una longitud de $2\pi$.

(*c*) Un arco de 270° tiene una longitud de $15\pi$.

(*d*) Un sector de 30° tiene un área de $3\pi$.

(*e*) Un sector de 36° tiene un área de $2\frac{1}{2}\pi$.

(*f*) Un sector de 120° tiene un área de $6\pi$.

**37.** Calcule el radio de un círculo si: (10.12)

(*a*) Un sector de área $12\pi$ tiene un arco de longitud $6\pi$.

(*b*) Un sector de área $10\pi$ tiene un arco de longitud $2\pi$.

(*c*) Un sector de área 25 $cm^2$ tiene un arco de longitud 5 cm.

(*d*) Un sector de área 162 tiene un arco de longitud 36.

**38.** Calcule el área de un segmento si su ángulo central es 60° y el radio del círculo es (*a*) 6; (*b*) 12; (*c*) 3; (*d*) $r$; (*e*) $2r$. (10.13)

**39.** Calcule el área de un segmento de un círculo si:

(*a*) El radio del círculo es 4 y el ángulo central mide 90°.

(*b*) El radio del círculo es 30 y el ángulo central mide 60°.

(*c*) El radio del círculo y la cuerda del segmento ambas miden 12.

(*d*) El ángulo central es 90° y la longitud del arco es $4\pi$.

(*e*) Su cuerda de longitud 20 unidades está a 10 unidades del centro del círculo.

**40.** Calcule el área de un segmento de un círculo si el radio del círculo es 8 y el ángulo central mide: (*a*) 120°; (*b*) 135°; (*c*) 150°. (10.13)

**41.** Si el radio de un círculo es 4, calcular el área de cada segmento formado por: (*a*) un triángulo equilátero inscrito; (*b*) un hexágono regular inscrito; (*c*) un cuadrado inscrito. (10.13)

$\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{10\sqrt{3}}{4}$

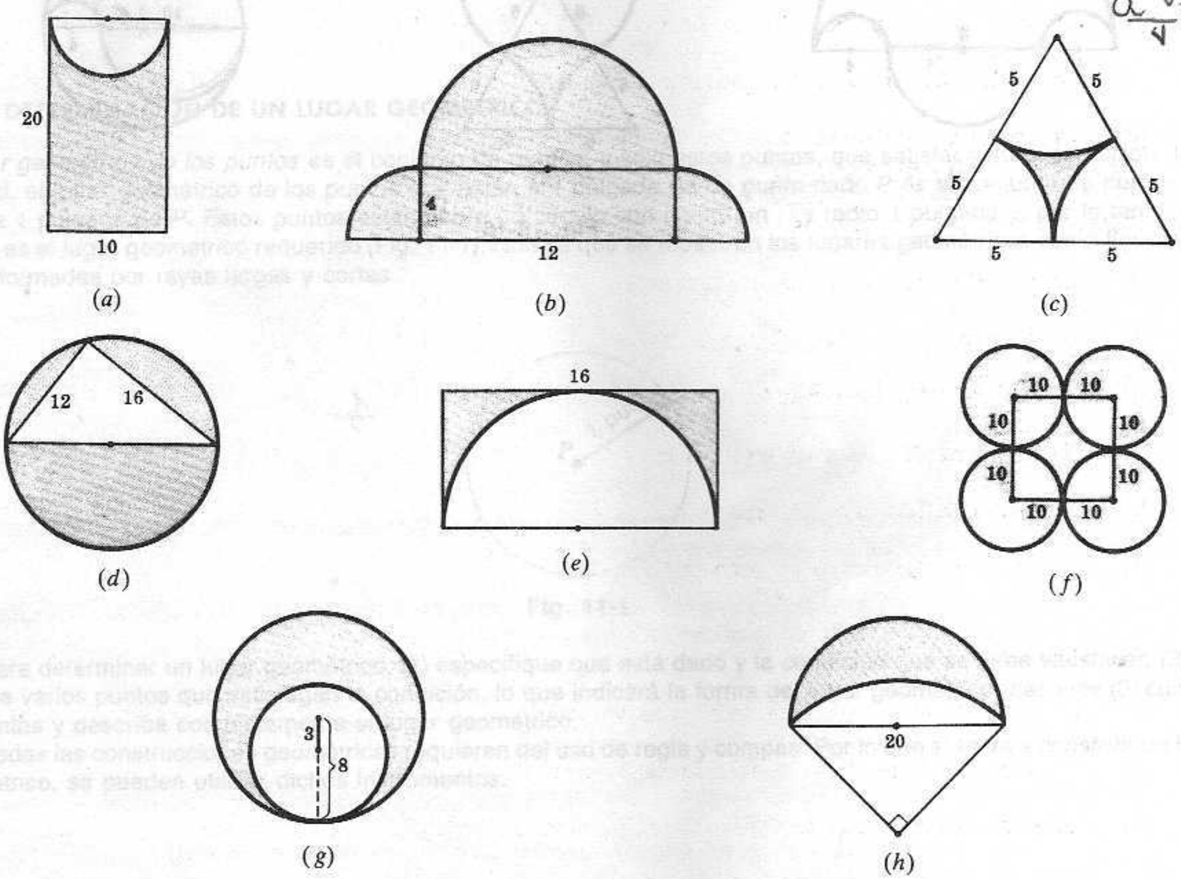



**Fig. 10-15**

**42.** Calcule el área de cada segmento de un círculo, si los segmentos están formados por: (10.13)

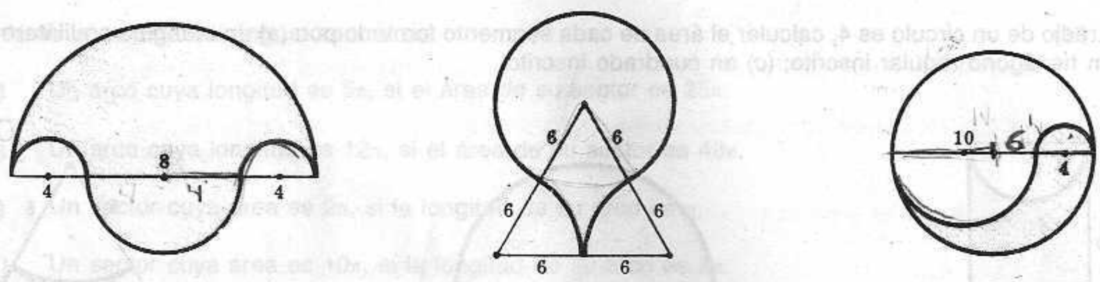
(*a*) Un triángulo equilátero inscrito y el radio del círculo es 6.

(*b*) Un hexágono regular inscrito y el radio del círculo es 3.

(*c*) Un cuadrado inscrito y el radio del círculo es 6.

**43.** Calcule el área sombreada en cada inciso de la figura 10-15. Cada punto marcado representa el centro de un arco o de un círculo. (10.15)

**44.** Calcule el área sombreada en cada inciso de la figura 10-16. Cada punto marcado representa el centro de un arco o de un círculo. (10.15)




(*a*) (*b*) (*c*)

**Fig. 10-16**